

Introduction aux filtres analogiques

1. Généralités, filtres élémentaires

1.1 Préambule

Pour des raisons multiples l'information utile peut être dissimulée au sein d'un signal complexe. Dès lors que le spectre de l'information est suffisamment isolé vis à vis des composantes indésirables, il est possible de l'extraire par filtrage.

Le filtrage en fréquence fut historiquement l'une des premières fonctions utilisées en radioélectricité. Aujourd'hui, on trouve des filtres dans de nombreux équipements électroniques. La tendance est actuellement de remplacer les structures analogiques par des versions numériques, de caractéristiques plus précises et plus reproductibles. On conserve cependant des solutions analogiques en électronique de puissance, en électroacoustique et dans les systèmes haute fréquence.

D'une manière générale, un filtre est un système linéaire dont le rôle est de modifier la composition spectrale d'un signal sans y ajouter de nouvelles composantes. Il permet le renforcement ou l'atténuation d'une ou plusieurs bandes de fréquences.

1.2 Filtres idéaux

Le cas idéal est un filtrage qui élimine totalement les bandes indésirables sans transition et sans introduire de déphasage dans les bandes conservées (Figure 1).

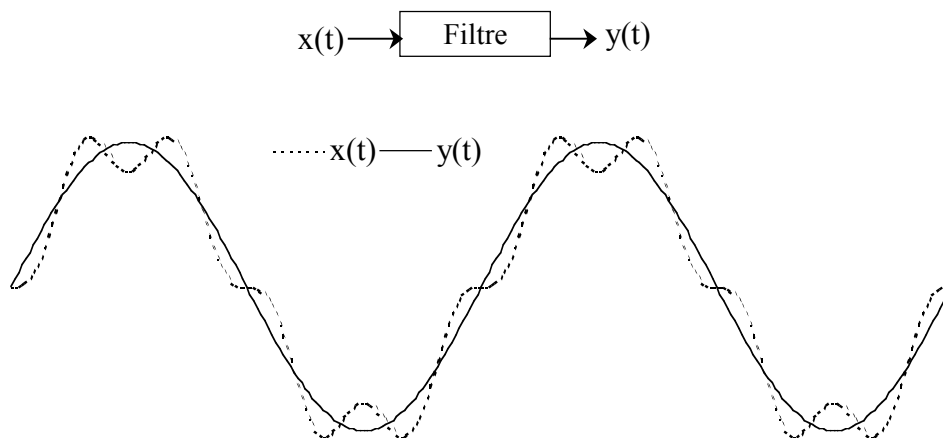


Figure 1. Filtrage idéal d'une composante fréquentielle

Selon la bande rejetée, on rencontre les 4 grandes catégories de filtres décrites en Figure 2.

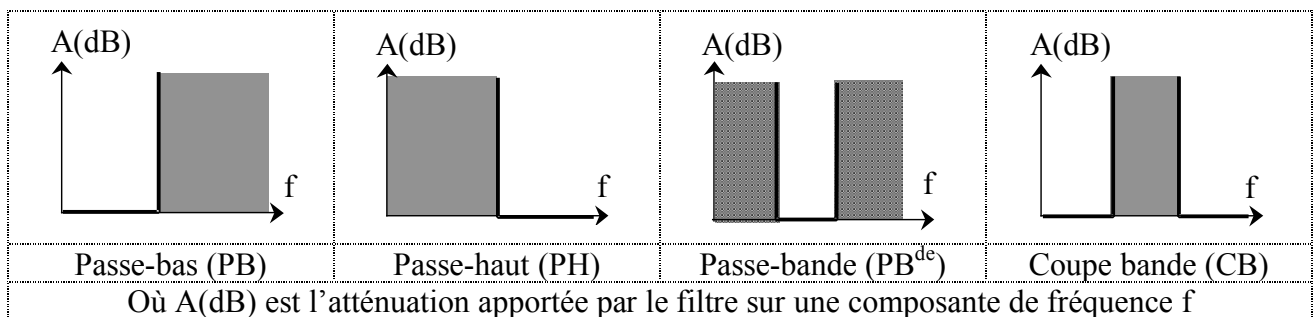


Figure 2. Les 4 catégories de filtres idéaux

1.3 Filtres réels

a) Equation différentielle

En pratique il n'est pas possible d'atteindre parfaitement les performances précédentes. Comme tout système linéaire, un filtre obéit à une équation différentielle linéaire du type (1)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (1)$$

$a_n, \dots, b_m$ sont des coefficients réels

Exemple : considérons le circuit R-L-C de la Figure 3

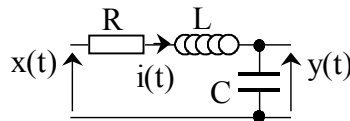


Figure 3. Circuit R-L-C

On peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + y(t) \\ i(t) &= C \cdot \frac{dy(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + LC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Revenons au cas général

En régime harmonique permanent, le signal d'entrée s'écrit $x(t) = X_o \sin(\omega t)$

La solution de l'équation (1) est du type $y(t) = Y_o \sin(\omega t + \varphi)$

Le rapport $\frac{Y_o}{X_o}$ exprime l'action du filtre sur l'amplitude et φ représente le déphasage introduit par le filtre sur la composante de pulsation ω (Figure 4).

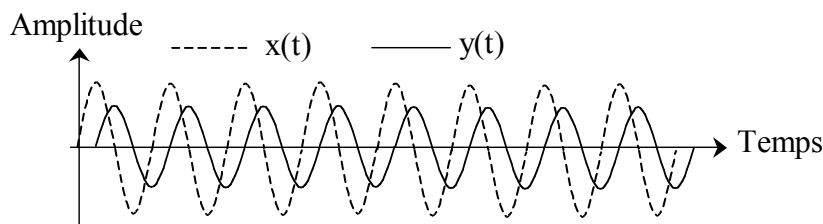


Figure 4. Effet d'un filtre réel

b) Fonction de transfert

Une des propriétés intéressantes de la transformation de Laplace est de transformer une fonction dérivée en une expression algébrique.

En notant $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, p étant une variable complexe, la transformée de la fonction dérivée $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ s'écrit $p^n F(p)$ lorsque l'on ne tient pas compte des conditions initiales.

L'application de cette propriété aux deux membres de l'équation différentielle (1) aboutit à la relation (2)

$$Y(p)[a_n p^n + \dots + a_0] = X(p)[b_m p^m + \dots + b_0] \quad (2)$$

On définit alors la fonction de transfert par le rapport (3)

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0} \quad (3)$$

La réponse en régime harmonique du filtre s'obtient en substituant $j\omega$ à la variable p . Cette réponse est une fonction complexe qui s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0} \quad (4)$$

Le module de $H(j\omega)$ est une fraction rationnelle en ω . Cela interdit des discontinuités en fréquence sur des bandes complètes.

c) Normalisation de l'unité de fréquence

Il est souvent pratique de normaliser l'unité de fréquence en posant $F = \frac{f}{f_{\text{ref}}}$ où f_{ref} est une valeur particulière; par exemple la fréquence de coupure (f_p) pour les filtres PB et PH, la fréquence centrale (f_0) pour les PB^{de} et CB.

On associe à cette normalisation la variable de Laplace réduite $s = \frac{p}{\omega_{\text{ref}}}$ où $\omega_{\text{ref}} = 2\pi f_{\text{ref}}$

d) Retard de phase (t_φ) et retard de groupe (t_g)

L'argument de $H(j\omega)$ représente le déphasage $\varphi(\omega)$ en régime harmonique permanent entre la sortie et l'entrée.

$$x(t) = \sin(\omega t) \rightarrow y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) = |H(j\omega)| \sin[\omega(t - t_\varphi)]$$

avec $\varphi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\}$

Le retard de phase est lié au déphasage par la relation (5)

$$t_\varphi = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad (5)$$

Le signal d'entrée n'étant pas forcément une sinusoïde pure, il est intéressant de connaître le temps mis par l'énergie du signal pour atteindre la sortie. Cette durée, appelée retard de groupe, obéit à l'équation différentielle (6).

$$t_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (6)$$

On veillera à ne pas la confondre avec le retard de phase t_φ . La Figure 5 illustre la différence entre les retards de phase et de groupe.

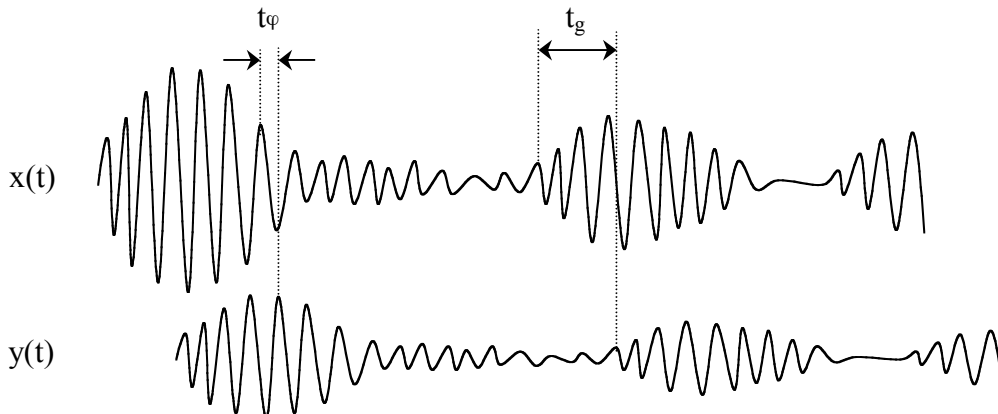


Figure 5. Définition graphique des retards de phase et de groupe

Pour que t_g soit constant, il faut que $\varphi(\omega)$ soit une fonction linéaire de ω . En pratique, cette situation n'est pas obtenue car $\varphi(\omega)$ est une fonction arctangente d'une fraction rationnelle en ω . C'est pourquoi, même si la bande passante du filtre est supérieure au spectre du signal d'entrée, celui-ci sera déformé en sortie car ses différentes composantes traversent le filtre avec des durées inégales. Les filtres analogiques qui présentent le retard de groupe le plus constant dans la bande passante s'appuient sur les polynômes de Bessel.

1.4 Fonction de transfert des filtres élémentaires

Nous résumons dans le Tableau 1 les fonctions de transfert et réponses en fréquence associées, des filtres élémentaires du 1^{er} et 2^{ème} ordre.

Fonction de transfert canonique	Module et phase ($s = jF$)	Graphique du gain $G(\text{dB}) = 20\log H(F) $
Passe-bas 1^{er} ordre $H(s) = \frac{1}{s+1}$ $s = \frac{p}{2\pi f_p}$	$F = \frac{f}{f_p}$ $ H(F) = \frac{1}{\sqrt{1+F^2}}$ $\varphi(F) = -\arctg(F)$	
Passe-haut 1^{er} ordre $H(s) = \frac{s}{s+1}$ $s = \frac{p}{2\pi f_p}$	$F = \frac{f}{f_p}$ $ H(F) = \frac{F}{\sqrt{1+F^2}}$ $\varphi(F) = \frac{\pi}{2} - \arctg(F)$	
Déphaseur 1^{er} ordre $H(s) = \frac{1-s}{1+s}$ $s = \frac{p}{2\pi f_p}$	$F = \frac{f}{f_p}$ $ H(F) = 1, \forall F$ $\varphi(F) = -2\arctg(F)$	
Passe-bas 2^{ème} ordre $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}$ $s = \frac{p}{2\pi f_p}$	$F = \frac{f}{f_p}$ $ H(F) = \frac{1}{\sqrt{(-F^2)^2 + 4\xi^2 F^2 + 1}}$ $\varphi(F) = -\arctg\left[\frac{2\xi F}{1-F^2}\right]$	

Passe-bas 2^{ème} ordre $H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\xi s + 1}$ $s = \frac{p}{2\pi f_p}$	$F = \frac{f}{f_p}$ $ H(F) = \frac{F^2}{\sqrt{(1 - F^2)^2 + 4\xi^2 F^2}}$ $\varphi(F) = \pi - \arctg \left[\frac{2\xi F}{1 - F^2} \right]$	
Passe-bande 2^{ème} ordre $H(s) = \frac{2\xi s}{s^2 + 2\xi s + 1}$ $H(s) = \frac{1}{1 + Q \left(s + \frac{1}{s} \right)}$ $s = \frac{p}{2\pi f_0} ; Q = \frac{1}{2\xi}$	$F = \frac{f}{f_0}$ $ H(F) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(F - \frac{1}{F} \right)^2}}$ $\varphi(F) = \frac{\pi}{2} - \arctg \left[\frac{2\xi F}{1 - F^2} \right]$	
Coupe-bande 2^{ème} ordre $H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2\xi s + 1}$ $H(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \cdot \frac{s}{1 + s^2}}$ $s = \frac{p}{2\pi f_0}$	$F = \frac{f}{f_0}$ $ H(F) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\xi^2 \cdot \left(\frac{F}{1 - F^2} \right)^2}}$ $\varphi(F) = -\arctg \left[\frac{2\xi F}{1 - F^2} \right]$	
Déphaseur 2^{ème} ordre $H(s) = \frac{s^2 - 2\xi s + 1}{s^2 + 2\xi s + 1}$ $s = \frac{p}{2\pi f_p}$	$F = \frac{f}{f_p}$ $ H(F) = 1, \forall F$ $\varphi(F) = -2\arctg \left[\frac{2\xi F}{1 - F^2} \right]$	

Tableau 1. Filtrés élémentaires du 1^{er} et 2^{ème} ordre

Notes:

- le paramètre ξ est le facteur d'amortissement; il doit être positif pour assurer la stabilité du filtre;
- pour les filtres passe-bande, 2ξ représente la bande passante relative à -3 dB;
- pour les filtres coupe-bande, 2ξ représente la bande rejetée relative à -3 dB;
- le paramètre $Q = \frac{1}{2\xi}$ est appelé facteur de qualité pour les filtre passe-bande et coupe-bande.

2. Structures de filtrage actives usuelles

Pour réaliser les filtres précédents, il est pratique d'utiliser des structures actives à base d'amplificateurs opérationnels. Ces structures utilisent uniquement des résistances et des condensateurs ce qui permet de s'affranchir des éléments selfiques.

Le Tableau 2 donne les structures actives les plus courantes.

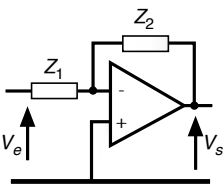
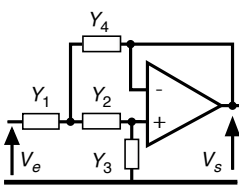
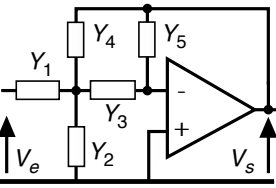
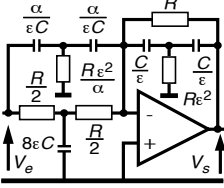
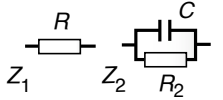
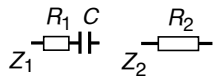
	Filtre simple	Structure de Sallen Key	Structure de Rauch	Structure à quadripôles
				
Fonction de transfert $H(p) = \frac{V_s}{V_e}$	$H(p) = -\frac{Z_2}{Z_1}$	$H(p) = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 Y_2 + Y_3(Y_1 + Y_2 + Y_4)}$	$H(p) = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 Y_3}$	$H(p) = -\frac{1 + \alpha R^2 C^2 p^2}{1 + 2\epsilon RCp + R^2 C^2 p^2}$
$\frac{1}{1 + as}$				
$\frac{\frac{s}{a}}{1 + \frac{s}{a}}$				
$\frac{1}{as^2 + bs + 1}$		$Y_3 = Y_4 = Cp$ $Y_1 = \frac{1}{R_1} \quad Y_2 = \frac{1}{R_2}$ $H(p) = \frac{1}{1 + (R_1 + R_2)Cp + R_1 R_2 C^2 p^2}$	$Y_1 = Y_3 = \frac{1}{R} \quad Y_5 = C_2 p$ $Y_4 = \frac{1}{R} \quad Y_2 = C_1 p$ $H(p) = -\frac{1}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1}$	
$\frac{\frac{s^2}{a}}{\frac{s^2}{a} + \frac{b}{a}s + 1}$		$Y_1 = Y_2 = Cp$ $Y_3 = \frac{1}{R_1} \quad Y_4 = \frac{1}{R_2}$ $H(p) = \frac{R_1 R_2 C^2 p^2}{1 + 2R_2 Cp + R_1 R_2 C^2 p^2}$	$Y_1 = Y_3 = Cp \quad Y_5 = \frac{1}{R_2}$ $Y_4 = Cp \quad Y_2 = \frac{1}{R_1}$ $H(p) = -\frac{R_1 R_2 C^2 p^2}{R_1 R_2 C^2 p^2 + 3R_1 Cp + 1}$	
$\frac{\frac{B}{a}s}{s^2 + \frac{B}{a}s + 1}$		Impossible avec une structure à gain unitaire	$Y_3 = \frac{1}{R} \quad Y_1 = C_1 p$ $Y_5 = C_2 p \quad Y_2 = Y_4 = \frac{1}{R}$ $H(p) = -\frac{RC_1 p}{R^2 C_1 C_2 p^2 + 3RC_2 p + 1}$	
$\frac{s^2 \Omega_\infty^{-2} + 1}{as^2 + bs + 1}$				$\omega_{ref} = \frac{1}{RC}$ $\Omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ $\xi = \epsilon$
Notes	$s = \frac{p}{\omega_{ref}}$ Y : admittance Z : impédance			

Tableau 2. Structures de filtrage actives courantes

Bibliographie

Analyse et traitement des signaux - Méthodes et applications au son et à l'image
E. TISSERAND, J.F. PAUTEX, P. SCHWEITZER Editions DUNOD – 2004.